Laplacetransformen*

Den dubbelsidiga Laplacetransformen *F(s)* av *f(t)* definieras

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

För vanliga funktioner såsom polynom, exponentialfunktioner och trigonometriska funktioner är inte dubbelsidiga Laplacetransformen definierad. Den enkelsidiga Laplacetransformen

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

däremot, är definierad för dessa funktioner. Några exempel finns i tabellen på nästa sida.

Övningsexempel

Bestäm $F(s)$ om

a) $f(t) = E$

b) $f(t) = E \cdot e^{-at}$

c) $f(t) = \sin(bt)$

d) $f(t) = \cos(bt)$

* Pierre Simon de *Laplace*, född 23 mars 1749 i Beaumont-en-Ange i Calvados, död 5 mars 1827 i Paris, fransk astronom, matematiker och fysiker.

Laplacetransformer

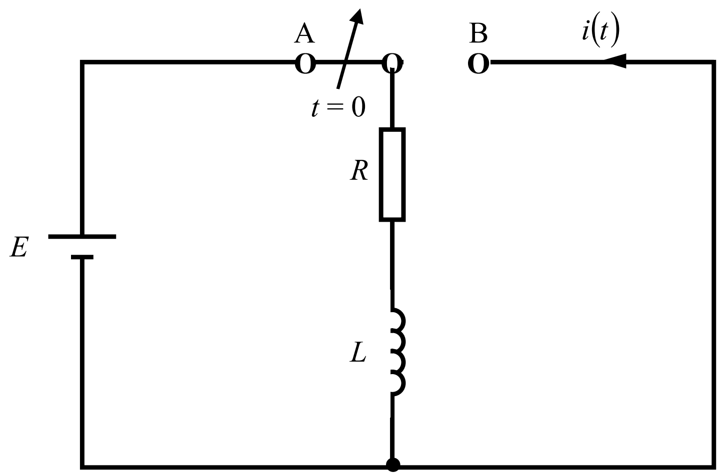
Formler:

$F(s)$	$f(t)$
$F(s-a)$	$e^{at} \cdot f(t)$
$e^{-as} \cdot F(s)$	$\sigma(t-a) f(t-a)$
$\frac{1}{s} \cdot F(s)$	$\int_0^1 f(\tau) d\tau$
$s \cdot F(s) - f(0)$	$f'(t)$
$s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - \ldots - f^{n-1}(0)$	$f^{(n)}(t)$
$\frac{dF(s)}{ds}$	$-t \cdot f(t)$
$\int_s^{\infty} F(p) dp$	$\frac{f(t)}{t}$

Funktioner:

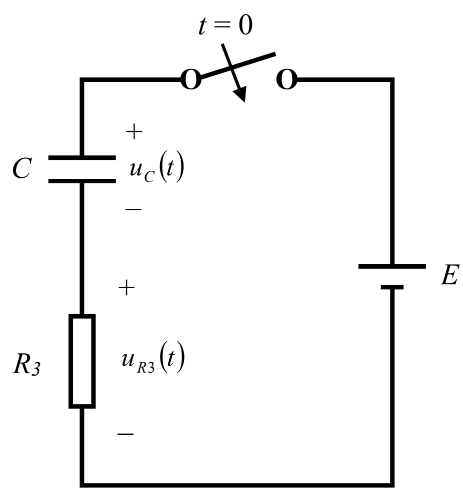
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos(bt)$
$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\sin(bt)$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \cdot \cos(bt)$
$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \cdot \sin(bt)$
$\frac{s+a}{(s+a)^2-b^2}$	$e^{-at} \cdot \cosh(bt)$
$\frac{b}{(s+a)^2-b^2}$	$e^{-at} \cdot \sinh(bt)$

Ex. 1 Beräkna $i(t)$ efter att brytaren slagits över från A till B vid tidpunkten $t = 0$.



$E = 12\ V$
$R = 24\ \Omega$
$L = 1{,}0\ H$

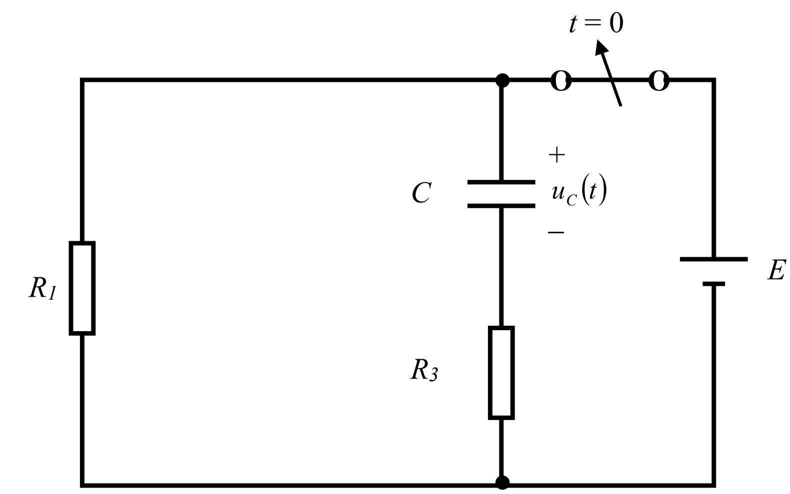
Ex. 2 a) Bestäm $u_C(t)$ och $u_{R3}(t)$ efter att brytaren har blivit tillslagen vid $t = 0$.
Begynnelsevillkor: Kondensatorn är oladdad.



$E = 5\ V$
$R_3 = 330\ \Omega$
$C = 1000\ \mu F$

b) Hur lång tid tar det för $u_{R3}(t)$ att sjunka ner till 0,7 V?

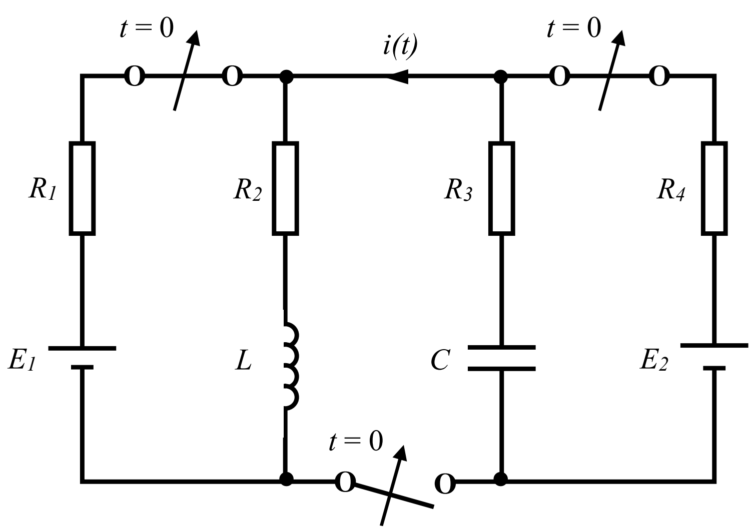
Ex. 3 Bestäm $u_C(t)$ efter att brytaren öppnats vid tidpunkten $t = 0$.



$E = 5\ V$
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_3 = 330\ \Omega$
$C = 1000\ \mu F$

Ex. 4 En gammal tentauppgift: 120524-6

Stationärt tillstånd råder i kretsen nedan då $t < 0$. Bestäm $i(t)$ efter att de två övre brytarna öppnats och den undre stängts vid tidpunkten $t = 0$.

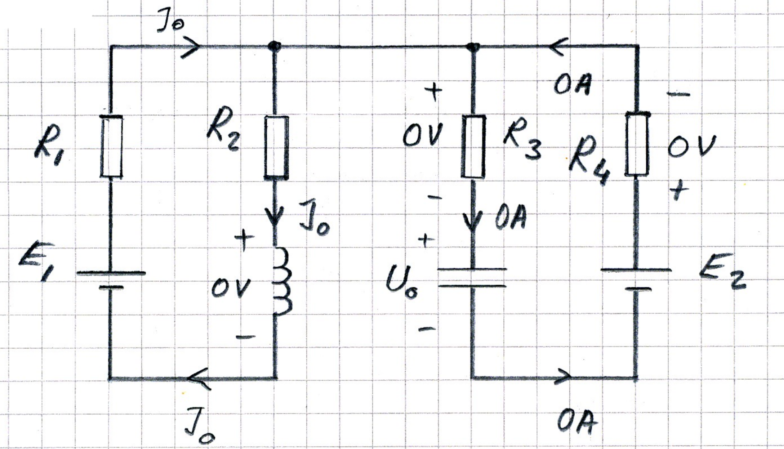


$E_1 = 6{,}0\ V$
$E_2 = 6{,}0\ V$
$R_1 = 820\ \Omega$
$R_2 = 180\ \Omega$
$R_3 = 820\ \Omega$
$R_4 = 180\ \Omega$
$L = 1{,}0\ mH$
$C = 2{,}0\ nF$

Lösningsförslag

Ex. 4

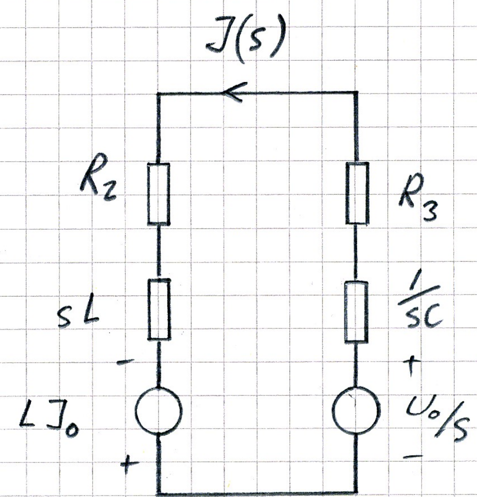
BEGYNNELSEVILLKOR $t < 0$



$$J_0 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} \implies J_0 = 6{,}0 \text{ mA}$$

$$U_0 = E_2 \implies U_0 = 6{,}0 \text{V}$$

$t \geq 0$ OPERATORSCHEMA



$$J(s) = \frac{LJ_0 + \frac{U_0}{s}}{sL + R_2 + R_3 + \frac{1}{sC}} \longrightarrow$$

$$\Rightarrow J(s) = \frac{6\cdot 10^{-6} + \dfrac{6{,}0}{s}}{s\cdot 10^{-3} + 10^{3} + \dfrac{1}{s\cdot 2{,}0\cdot 10^{-9}}} =$$

$$= 6{,}0\cdot 10^{-3}\cdot \frac{s+10^{6}}{s^{2} + s\cdot 10^{6} + 0{,}5\cdot 10^{12}} =$$

$$= 6{,}0\cdot 10^{-3}\cdot \frac{(s+0{,}5\cdot 10^{6}) + 0{,}5\cdot 10^{6}}{(s+0{,}5\cdot 10^{6})^{2} + (0{,}5\cdot 10^{6})^{2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$i(t) = 6{,}0\cdot e^{-0{,}5\cdot 10^{6}t}\left(\cos 0{,}5\cdot 10^{6}t + \sin 0{,}5\cdot 10^{6}t\right)\,\text{mA}$$

$$= 6{,}0\sqrt{2}\,e^{-0{,}5\cdot 10^{6}t}\sin\left(0{,}5\cdot 10^{6}t + \frac{\pi}{4}\right)\,\text{mA}$$

$\sin\left(0.5\cdot 10^{6}t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(0{,}5\cdot 10^{6}t + 0\right) = \Big/\ j\omega$-TRANSFORMATION

$\rightsquigarrow\ e^{j\frac{\pi}{2}} + e^{j0} = j+1 = \sqrt{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \Big/ = \sqrt{2}\sin\left(0{,}5\cdot 10^{6}t + \frac{\pi}{4}\right)$